

levy et TCL

Théorème: $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$ en loi $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_X(t)$

($\Rightarrow$) Puisque $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto e^{itx}$ est continue bornée, on a $E[e^{itX_n}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E[e^{itX}]$, d'où

$$\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in C_0(\mathbb{R})$. Par densité, $\exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon/3$. Par bijectivité de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\exists h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(h) = g$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|E[f(X_n)] - E[f(X)]| \leq |E[(f-g)(X_n)]| + |E[g(X_n)] - E[g(X)]| + |E[g(X)] - E[f(X)]| \leq 2\|f-g\|_\infty + |E[g(X_n)] - E[g(X)]|$$

Où on calcule $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E[g(X_n)] &= \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_{X_n}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(t) e^{-itx} dt \right) dP_{X_n}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} dP_{X_n}(x) \right) dt \quad \text{par Fubini, } h \in L^1(\mathbb{R}), |e^{-itx}| \leq 1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t) \varphi_{X_n}(-t) dt \end{aligned}$$

* $\forall n \in \mathbb{N}, t \mapsto h(t) \varphi_{X_n}(-t)$ mesurable

* $\forall t \in \mathbb{R}, h(t) \varphi_{X_n}(-t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} h(t) \varphi_X(-t)$ par hypothèse

* $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |h(t) \varphi_{X_n}(-t)| \leq |h(t)|$ intégrable

Par convergence dominée, $E[g(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}} h(t) \varphi_X(-t) dt = E[g(X)]$. Donc

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |E[f(X_n)] - E[f(X)]| \leq 3\varepsilon/3 = \varepsilon$, d'où $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$ en loi.

Théorème: Soit $(X_n)_n \in L^2(\Omega, \mathcal{P})^{\mathbb{N}}$ IID, $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Alors $\frac{S_n - nE(X_1)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1)$ en loi

Quitte à centrer réduite, on suppose $E(X_1) = 0$ et $Var(X_1) = 1$. Puisque $X_1 \in L^2(\Omega, \mathcal{P})$

on a $\varphi := \varphi_{X_1} \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) = -1$. Alors on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) &= E[e^{it \frac{S_n}{\sqrt{n}}}] = \left(\prod_{k=1}^n E[e^{it \frac{X_k}{\sqrt{n}}}] \right) \quad \text{par IID} \\ &= E[e^{it \frac{X_1}{\sqrt{n}}}]^n = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^n \quad \text{par Taylor Young.} \\ &= \left(\varphi(0) + \frac{t}{\sqrt{n}} \varphi'(0) + \frac{(\frac{t}{\sqrt{n}})^2}{2} \varphi''(0) + \frac{1}{n} E\left(\frac{t^3}{\sqrt{n}}\right) \right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-t^2/2} \end{aligned}$$

On a $\varphi_2(t) = e^{-t^2/2}$. Donc $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_2(t)$ et $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{Z}$ en loi

Lemme: $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$ en loi $\Leftrightarrow \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$

($\Rightarrow$) Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$ loi, on a $\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset C_B^\infty(\mathbb{R})$ $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$.

($\Leftarrow$) Soit $f \in C_B^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Alors, $\exists A > 0$ tq $P(|X| \geq A) \leq \varepsilon$ ($A_{n+2} \subset A_n := \{|X| \geq n\}, \bigcap_{n=0}^\infty A_n = \emptyset$)

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X| > n) = P(\bigcap_{n=0}^\infty A_n) = 0$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tq $\varphi|_{[-A, A]} \equiv 1$, $\text{supp } \varphi \subset [-2A, 2A]$

$|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq |\mathbb{E}[f(X_n)(1 - \varphi(X_n))]| + |\mathbb{E}[f(X_n)\varphi(X_n) - f(X)\varphi(X)]| + |\mathbb{E}[f(X)(1 - \varphi(X))]|$

$\leq \|f\|_\infty \mathbb{E}[1 - \varphi(X_n)] + |\mathbb{E}[f(X_n)\varphi(X_n) - f(X)\varphi(X)]| + \|f\|_\infty \mathbb{E}[1 - \varphi(X)]$

$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq \|f\|_\infty \mathbb{E}[1 - \varphi(X)] + 0 + \|f\|_\infty \mathbb{E}[1 - \varphi(X)] \leq 2\|f\|_\infty \mathbb{E}[1_{|X| \geq A}] \leq 2\|f\|_\infty \varepsilon$

Lemme: $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R})} = C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid |f(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0\}$

Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Alors $\exists A > 0$, $|x| \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tq $\chi|_{[-A, A]} \equiv 1$ et $\text{supp } \chi \subset [-A+1, A+1]$. Par Weierstrass $\exists p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ $\|(f-p)1_{[-A+1, A+1]}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$\|f - \chi p\|_\infty \leq \|f - \chi p\|_\infty + \|\chi p - \chi p\|_\infty$ $|1 - \chi| \leq 1_{|x| \geq A}$ $|\chi| \leq 1_{[-A+1, A+1]}$

$\leq \|f\|_\infty 1_{|x| \geq A} + \|(f-p)1_{[-A+1, A+1]}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Proposition: $X \in L^k(\Omega) \Rightarrow \phi_X \in C^k(\mathbb{R})$ et $\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$

Soit $f_k: (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto e^{i\lambda x}$, on a $\forall x \in \mathbb{R} \mapsto f_k(\cdot, x) \in C^\infty$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \mapsto f_k(\lambda, x)$ mesurable

et $|f_k(\lambda, x)| = |x|^k |e^{i\lambda x}| \leq |x|^k \in L^1(\mathbb{R}, P_x)$ car $\mathbb{E}[|X|^k] = \int_{\mathbb{R}} |x|^k P_x(x) < \infty$. Donc $\phi_X: t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_x(x)$

est C^∞ avec $\phi_X^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} x^k i^k e^{itx} dP_x(x)$, d'où $\phi_X^{(k)}(0) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k dP_x(x) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.